Serie a termini di segno alterno

Serie del tipo: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$ con $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Es: $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(2)$

- **Convergenza assoluta**

  $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum |a_n|$ converge

- **Convergenza semplice**

  $\sum a_n$ si dice semplicemente convergente se $\sum a_n$ converge e $\sum |a_n|$ non converge.

Teorema: Se $\sum |a_n|$ converge allora $\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ una serie conv. assolutamente è convergente.

Criterio di Leibnitz

Sia $\sum (-1)^n a_n$ a segni alterni con $a_n \geq 0$

Se: ① $a_n > 0$

② $\lim_{n} a_n = 0$

③ a_n è decrescente $\quad [a_{n+1} < a_n]$ o [derivata $- \searrow$]

Allora $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_m(x)$$

Se $x_0 = 0$ si parla di sviluppabilità in serie di Mac-Laurin

Serie numeriche

Serie di riferimento

se $q \neq 1$ $\sum q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

1. Serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

$$\sum_{i=N}^{n} \frac{q^N}{1-q} \qquad |q|<1$$

2. Serie armonica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$$

- converge se $q>1$
- diverge se $q \leq 1$.

3. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q \log^\beta n}$$

- se $q>1$ converge $\forall \beta$
- se $q=1$ converge se $\beta>1$.

4. $\frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$.

Condizione necessaria per la convergenza:

$$\lim_{n} a_n = 0$$

Se $\lim_{n} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ non converge

Tale condizione però non è sufficiente in quanto devono andare a 0 anche velocemente.

Es. $\sum \frac{1}{n}$ è divergente.

Serie
- convergente
- divergente positivamente
- divergente negativamente.
- oscillante

Serie a termini non negativi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{con } a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow S_k \text{ è monotona crescente} \rightarrow \sum a_n \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge} \\ \text{non indeterminata (MAI!)} \end{cases}$$

Criteri: (per serie a termini non negativi)

1. Criterio del confronto

$\sum a_n, \sum b_n$ a termini non negativi con $a_n \leq b_n$

$$0 \leq \sum a_n \leq \sum b_n$$

Allora:

- $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
- $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

2. Criterio della radice n-esima

$\sum a_n$ a termini non negativi $(a_n \geq 0)$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \begin{cases} L < 1 & \text{converge} \\ L > 1 & \text{diverge} \\ L = 1 & \text{caso dubbio!} \end{cases}$$

3. Criterio del rapporto

$\sum a_n$ serie a termini positivi ($a_n > 0$)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \begin{cases} L < 1 & \text{converge} \\ L > 1 & \text{diverge} \\ L = 1 & \text{caso dubbio!} \end{cases}$$

Spesso si usa Taylor per trovare $\sum b_n \Rightarrow$ Es. $\sqrt{\cos\frac{1}{n}}$.

4. Criterio del confronto asintotico

$\sum a_n$ a termini non negativi $(a_n \geq 0)$, $\sum b_n$ a termini positivi $b_n > 0$

1. Se $0 < \lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < +\infty$ allora $\boxed{\sum a_n \text{ e } \sum b_n \text{ hanno lo stesso carattere}}$
2. Se $\lim_{n} \dfrac{a_n}{b_n} = \boxed{+\infty}$ $\quad]0, +\infty]$ $\quad \sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge
3. Se $\lim_{n} \dfrac{a_n}{b_n} = \boxed{c}$ $\quad [0, +\infty[$ $\quad \sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.