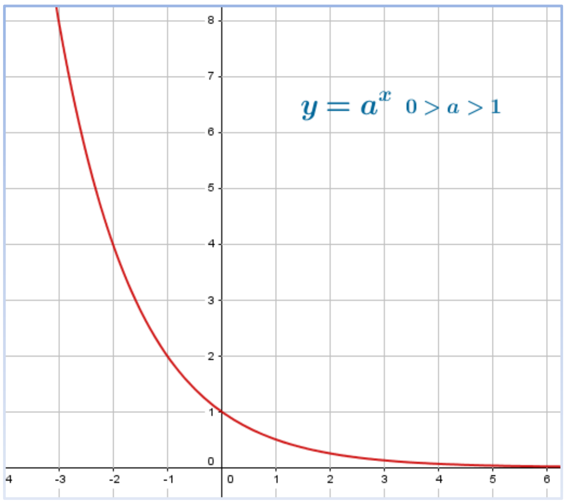
Funzioni esponenziali

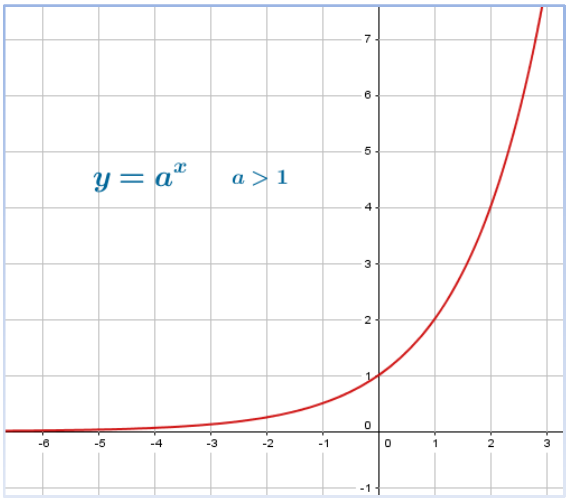
Le equazioni esponenziali sono quelle equazioni in qui l'incognita appare all'esponente, nella forma:

$$a^x = b$$

In particolare, se:

$0 > a > 1$ $\qquad\qquad\qquad$ $a > 1$





Clicca qui, per provare l'iterazione di una funzione esponenziale.

Inoltre, osservando il grafico si può notare che il ***codominio*** (valori dell'asse y) di una funzione esponenziale è **sempre positivo**.

Prerequisiti:

1. $a^m * a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $a^m : a^n = a^{m-n}$
2. $(a^m)^n = a^{m*n}$
3. $a^n * b^n = (a*b)^n$ $\qquad$ $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
4. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

***Autore**: Samuele Sandrini*

Equazioni esponenziali

I casi maggiormente frequenti sono:

1. ***Equazioni con funzioni esponenziali riconducibili alla stessa base (*** $A^x = A^y$ ***)***

Es.

$$4^{x-1} = 16^{x-2}$$

Nell'equazione d'esempio, si nota subito che i due membri (seguendo le proprietà delle potenze) potrebbero essere ricondotti alla stessa base nel seguente modo:

$$4^{x-1} = 4^{2(x-2)}$$

Per verificare l'uguaglianza, avendo **base uguale** devono avere anche **esponenti uguali**, soluzione:

$$x - 1 = 2x - 4 \qquad x = 3$$

2. ***Equazioni con base diversa ma uguale esponente***

$$A^x = B^x \qquad Soluzione: \quad x = 0$$

Es.

$$3^{X+2} = 4^{X+2} \qquad Soluzione: \quad x + 2 = 0 \qquad x = -2$$

3. ***Introduzione di una variabile ausiliaria***

Es.

$$4^x + 2^{1+x} - 24 = 0$$

Grazie alla proprietà delle potenze (prodotto di potenze aventi base uguale), può essere trasformata nel seguente modo:

$$2^{2(x)} + 2^1 * 2^x - 24 = 0$$

Chiamando $t = 2^x$, otteniamo:

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$t_1 = 4 \; t_2 = -6$$

Non dobbiamo dimenticare che il risultato non è la variabile ausiliaria t, per cui:

$$2^x = 4 \qquad x = 2$$

$$2^x = -6 \qquad Non \quad accettabil\,e$$

***Autore**: Samuele Sandrini*

Casi particolari:

1.

$$\boxed{A^x * A^y * A^z = 1}$$

Grazie alle proprietà delle potenze posso trasformarlo in: $A^{x+y+z} = A^0$ e quindi la ***soluzione*** è:

$$x + y + z = 0$$

2.

$$\boxed{\left(A^x \pm Numero\right)\cdot\left(B^x \pm Numero\right) = 0}$$

Suluzione: $\left(A^x \pm Numero\right) = 0$ $\left(B^x \pm Numero\right) = 0$

3.

$$\boxed{A^x = B^{x+Numero}}$$

Soluzione: $\left(\frac{A}{B}\right)^X = B^{Numero}$ *Quindi:* $x = \log_{\frac{A}{B}} B^{Numero}$

Es.

$3^{2x+4} = 5^x$ Applico le proprietà delle potenze: $81 * 3^{2x} = 5^x$

$\frac{9^x}{5^x} = \frac{1}{81}$ Successivamente: $\left(\frac{9}{5}\right)^x = \frac{1}{81}$

Soluzione: $x = \log_{\frac{9}{5}} \frac{1}{81}$

Autore: *Samuele Sandrini*