Integrali con Taylor

Procedimento:

1. Integrale di una funzione unica sviluppabile in serie (Taylor)

Es: $\int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right)dx$

a. La funzione che si può esprimere come serie di Taylor va sostituita;

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x^{1/2})^{2n}}{(2n)!} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x)^n}{(2n)!}$$

b. Separare la serie (dove compare la variabile ***n***) dall'integrale (dove compare la variabile ***x***);

$$\int_0^1 (x)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 (x)^n$$

c. Risolvere l'integrale;

Come risolvere un integrale:
Per risolvere l'integrale, prima si trova la primitiva (***F***) e successivamente si applica la seguente formula:

$$F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{[x^2]_a^b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Dove ***a*** e ***b*** rappresentano due numeri.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{[x^{n+1}]_0^1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{n+1}$$

d. Se emergono nuove variabili ***n***, posizionarle all'interno della sommatoria;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot (n+1)}$$

e. A questo punto basta ***sviluppare la serie*** prendendo alcuni valori (sostituire ad n valori incrementali: 0 – 1 – 2 – 3 – 4 fino a raggiungere la precisione richiesta). ***La dove converge la serie, converge anche l'integrale***.

$$\frac{1}{0! \cdot 1} - \frac{1}{2! \cdot 2} + \frac{1}{4! \cdot 3} - \frac{1}{6! \cdot 4} + \frac{1}{8! \cdot 5} - \frac{1}{10! \cdot 6} + \ldots = 1 - 0{,}25 + 0{,}0139 - 0{,}00035 + 0{,}000005 + \ldots = 4{,}0136$$

È intuibile capire quando fermarsi: da un certo valore di ***n*** in poi il numero è irrisorio (piccolissimo) perciò insignificante.

Calcolo del fattoriale:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Es: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

NB: $0! = 1$

Autore: *Samuele Sandrini*

2. *Integrale di una funzione sviluppabile in serie (Taylor) per una funzione qualsiasi*

Es: $\int_0^1 x^{10} \cdot \sin(2x)dx$

a. La funzione che si può esprimere come serie di Taylor va sostituita;

$$\int_0^1 x^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \int_0^1 x^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2)^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b. Separare la serie (dove compare la variabile ***n***) dall'integrale (dove compare la variabile ***x***);

$$\int_0^1 x^{10} \cdot x^{2n+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Proprietà delle potenze:

1. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
2. $x^n \cdot x^z = x^{n+z}$

c. Applicare la 2ª proprietà delle potenze nella parte dell'integrale;

$$\int_0^1 x^{10+2n+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n+11}$$

d. Risolvere l'integrale;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{[x^{2n+12}]_0^1}{2n+12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(1^{2n+12}) - (0^{2n+12})}{2n+12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2n+12}$$

e. Se emergono nuove variabili ***n***, posizionarle all'interno della sommatoria;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2)^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+12)}$$

f. A questo punto basta ***sviluppare la serie*** prendendo alcuni valori (sostituire ad n valori incrementali: 0 – 1 – 2 – 3 – 4 fino a raggiungere la precisione richiesta). ***La dove converge la serie, converge anche l'integrale***.

$$\frac{1 \cdot 2^1}{1! \cdot (12)} - \frac{1 \cdot 2^3}{5! \cdot (14)} + \frac{1 \cdot 2^5}{7! \cdot (16)} - \frac{1 \cdot 2^7}{9! \cdot (18)} + \frac{1 \cdot 2^9}{11! \cdot (20)} = 0{,}1666 - 0{,}0048 + 0{,}000397 - 0{,}0000196 = 0{,}16218$$

È intuibile capire quando fermarsi: da un certo valore di ***n*** in poi il numero è irrisorio (piccolissimo) perciò insignificante.

Autore: *Samuele Sandrini*

3. *Integrale di una funzione sviluppabile in serie di Talor (una radice) per una funzione qualsiasi*

Es: $\int_0^{1/4} x^7 \cdot \sqrt{1+2x}\,dx$

a. Riscrivere l'integrale secondo le proprietà delle potenze;

$$\int_0^{1/4} x^7 \cdot (1+2x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

b. La funzione che si può esprimere come serie di Taylor va sostituita;

$$\int_0^{1/4} x^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (2x)^n = \int_0^{1/4} x^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (2)^n \cdot x^n$$

c. Separare la serie (dove compare la variabile ***n***) dall'integrale (dove compare la variabile ***x***);

$$\int_0^{1/4} x^7 \cdot x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (2)^n$$

d. Applicare la 2^a proprietà delle potenze nella parte dell'integrale;

$$\int_0^{1/4} x^{7+n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (2)^n \cdot \int_0^{1/4} x^{7+n}$$

e. Risolvere l'integrale;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (2)^n \cdot \frac{[x^{8+n}]_0^{1/4}}{n+8} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (2)^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{8+n}}{n+8}$$

f. Se emergono nuove variabili ***n***, posizionarle all'interno della sommatoria;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{2^n \cdot (1/4)^{8+n}}{(n+8)}$$

g. A questo punto basta ***sviluppare la serie*** prendendo alcuni valori (sostituire ad n valori incrementali: 0 – 1 – 2 – 3 – 4 fino a raggiungere la precisione richiesta). ***La dove converge la serie, converge anche l'integrale***.

$$\binom{1/2}{0} \frac{2^0 \cdot (1/2)^8}{8} + \binom{1/2}{1} \frac{2^1 \cdot (1/2)^9}{9} + \binom{1/2}{2} \frac{2^2 \cdot (1/2)^{10}}{10} + \binom{1/2}{3} \frac{2^3 \cdot (1/2)^{11}}{11} + \ldots$$

- $\binom{1/2}{0} = 1$
- $\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$
- $\binom{1/2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!} = -\frac{1}{8}$
- $\binom{1/2}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} = \frac{1}{12}$

Coefficiente binomiale:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \ldots \cdot [\alpha - (n-1)]}{n!}$$

Al numeratore devono comparire n termini

Es.

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot (5-1) \cdot (5-2)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$

NB

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \qquad e \qquad \binom{\alpha}{1} = \alpha$$

Autore: *Samuele Sandrini*