Metodi di integrazione

1. *Metodo di Sostituzione*

Es_1: $\int (5x+2)^{50} dx$

a. Chiamare $5x+2=y$;

$\int (y)^{50} dx$

b. Calcolare il ***differenziale*** secondo la variabile y (ora è secondo la variabile x: dx);

$$\underbrace{5x+2}_{\text{DERIVATA DI (5X+2) dx}} = \underbrace{y}_{\text{DERIVATA DI (y) dx}}$$

$$(5x+2)' \cdot dx \quad = \quad (y)' \cdot dy$$

Quindi dopo aver calcolato le derivate di entrambi i membri si ottiene: $5dx = dy$. Isolando***:*** $dx = \frac{dy}{5}$;

c. Si riscrive l'integrale con le variabili e il differenziale sostituito e lo si risolve nella variabile ***y***:

$$\int (y)^{50} \frac{dy}{5} = \frac{1}{5}\int (y)^{50} dy = \frac{y^{51}}{5 \cdot 51} = \frac{y^{51}}{255}$$

d. Si sostituisce ad ***y*** il corrispondente valore di ***x:***

$$\frac{(5x+2)^{51}}{255} + c$$

e. Risultato:

$$\int (5x+2)^{50} dx = \frac{(5x+2)^{51}}{255} + c$$

Es_2: $\int \sqrt{1+e^x}\, e^x dx$

a. Chiamare $1+e^x = y^2$;

b. Calcolare il ***differenziale*** secondo la variabile y;

$$(1+e^x)' \cdot dx = (y^2)' \cdot dy \qquad e^x \cdot dx = 2y \cdot dy \qquad dx = \frac{2y}{e^x} \cdot dy$$

c. Si riscrive l'integrale con le variabili e il differenziale sostituito e lo si risolve nella variabile ***y***:

$$\int \sqrt{y^2}\, e^x \cdot \frac{2y}{e^x} dy = 2\int y \cdot y \;\, dy = 2\int y^2 = \frac{2y^3}{3}$$

d. Si sostituisce ad ***y*** il corrispondente valore di ***x*** (Ricordando che $1+e^x = y^2$ e quindi $y = \sqrt{1+e^x}$):

NB. $\frac{2y^3}{3}$ ***Può essere scritto come*** $\frac{2y^2 \cdot y}{3}$ ***e perciò:*** $\frac{2(1+e^x)\cdot\sqrt{1+e^x}}{3}$

e. Risultato:

$$\int \sqrt{1+e^x}\, e^x dx = \frac{2\cdot(1+e^x)\cdot\sqrt{1+e^x}}{3} + c$$

Autore*: Samuele Sandrini*

Es_3: $\int (2+x)\sqrt{3-x}dx$

a. Chiamare $3-x=y^2$;

b. Calcolare il ***differenziale*** secondo la variabile y;

$$(3-x)'\cdot dx=(y^2)'\cdot dy \qquad -1\cdot dx=2y\cdot dy \qquad dx=-2y\cdot dy$$

c. Si riscrive l'integrale con le variabili e il differenziale sostituito e lo si risolve nella variabile ***y***:

$$\int (2+x)\sqrt{y^2}\cdot -2y\ dy=-2\int (2+x)\cdot y\cdot y\ dy=-2\int (2+x)\cdot y^2\ dy$$

Come si può notare è rimasta una variabile ***x***, da sostituire nel corrispondente in ***y*** (ricordando che $3-x=y^2$): $x=3-y^2$ e perciò:

$$-2\int (2+x)\cdot y^2\ dy=-2\int (2+3-y^2)\cdot y^2\ dy=2\int (5-y^2)y^2dy=2\int 5y^2-y^4dy=2\cdot\left(\frac{5\cdot y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right)$$

d. Si sostituisce ad ***y*** il corrispondente valore di ***x*** (Ricordando che $3-x=y^2$ e quindi $y=\sqrt{3-x}$):

NB. $y^3=y^2\cdot y$ ***e*** $y^5=y^4\cdot y=y^2\cdot y^2\cdot y$ ***e perciò:*** $2\cdot\left(\frac{5\cdot(3-x)\cdot\sqrt{3-x}}{3}-\frac{(3-x)^2\sqrt{3-x}}{5}\right)$

e. Risultato:

$$\int (2+x)\sqrt{3-x}dx=2\cdot\left(\frac{5\cdot(3-x)\cdot\sqrt{3-x}}{3}-\frac{(3-x)^2\sqrt{3-x}}{5}\right)+c$$

2. *Metodo di integrazione per parti*

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

Dimostrazione:

a. Derivata del prodotto ($f(x)\cdot g(x)$):

$$\underbrace{\left(f(x)\cdot g(x)\right)'}=\underbrace{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$$

1° MEMBRO E' *UGUALE* ***AL 2° MEMBRO***

PERCIO'

L'INTEGRALE DI *E' UGUALE* ***ALL'INTEGRALE DEL***

b. $\int\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\int[f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)]$

c. Al 1° membro l'***integrale della derivata*** rappresenta la funzione di partenza, mentre al secondo membro è possibile dividerlo in 2 integrali:

$$f(x)\cdot g(x)=\int f'(x)\cdot g(x)+\int f(x)\cdot g'(x)$$

d. Isolando opportunamente si ottiene:

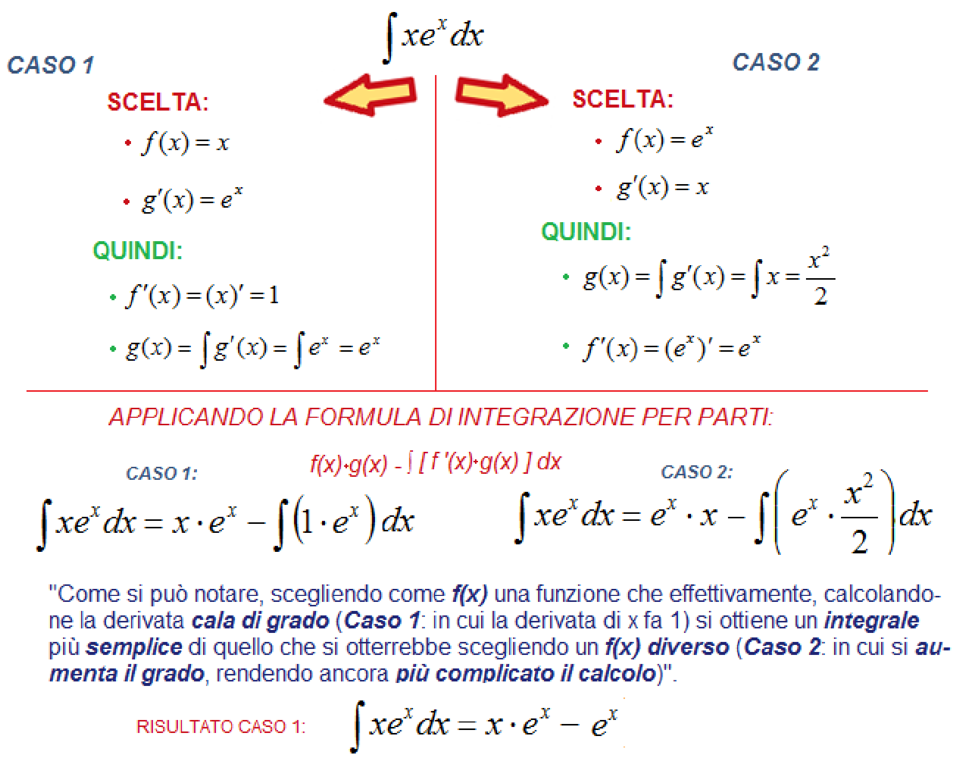
$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

Autore: *Samuele Sandrini*

Il ***metodo di integrazione per parti*** si utilizza qualora vi siano ***due diverse funzioni*** che si ***moltiplicano*** tra loro. In particolare, esso si applica nel caso in cui non è possibile usare il metodo di sostituzione o altri metodi riconducibili a quelli immediati.
Il **problema** principale per quanto riguarda tale metodo di integrazione sta nella ***scelta*** di quale funzione chiamare ***f(x)*** e quale chiamare ***g'(x)***. Ciò vuol dire che della funzione che viene chiamata f(x) dovrò calcolarne la derivata (f'(x)) e la funzione che viene chiamata g'(x) dovrò calcolarne la primitiva (g(x)). Perciò seguono utili indicazioni:

- Scegliere g'(x) la funzione di cui si conosce (o facilmente calcolabile) la primitiva;
- Scegliere f(x) la funzione di cui non si conosce la primitiva, ma al contrario risulta facile calcolarne la derivata;
- Scegliere ***f(x)*** una funzione in modo tale da ***calarne il grado*** (Es. x, x^2);

Es_1:



Es_2: $\int \ln(x) dx$

a. In questo caso si potrebbe pensare di non dover applicare il metodo di integrazione per parti poiché vi è solamente una funzione. Il problema sorge in quanto la primitiva di $\ln(x)$ non è tra quelle note. Conviene perciò effettuare una leggera modifica all'integrale:

$$\int 1 \cdot \ln(x) dx$$

b. Per quanto riguarda la scelta di f(x) e g'(x), sicuramente non sceglierò $g'(x) = \ln(x)$ poichè non ne conosco la primitiva e tornerei al problema di partenza e quindi sceglierò:

$f(x) = \ln(x)$ Infatti ne conosco la derivata : $f'(x) = [\ln(x)]' = \frac{1}{x}$;

$g'(x) = 1$ Infatti ne conosco la primitiva $g(x) = x$.

***Autore**: Samuele Sandrini*

c. Applicando la regola del metodo di integrazione per parti si ottiene:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)\, dx = x\ln(x) - \int 1\, dx = x\ln(x) - x = x[\ln(x)-1]+c$$

3. *Metodo di integrazione per parti doppio*

In determinati casi il ***metodo di integrazione per parti*** è necessario applicarlo ***più volte*** all'interno dello stesso integrale. In particolare se il ***grado*** della funzione ***f(x)*** scelta è ***n*** il numero di volte che bisogna applicare tale metodo risulta ***n***.

Es_1: $\int x^2 \cdot e^x$

a. Scelta:

$f(x) = x^2$ In modo tale che cali di grado: $f'(x) = \frac{2x}{2}$

$g'(x) = e^x$ Calcolando la primitiva: $g(x) = \int e^x dx = e^x$

b. Applicando il metodo di integrazione per parti:

$$\int x^2 \cdot e^x = x^2 \cdot e^x - \int \frac{2x}{2}\cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int x \cdot e^x dx$$

c. E' ora necessario applicare il metodo di integrazione per parti nell'integrale ottenuto:

$$x^2 \cdot e^x - \boxed{\int x \cdot e^x}$$

Scelta:

- $f(x) = x$ In modo tale che cali di grado: $f'(x) = 1$
- $g'(x) = e^x$ Calcolando la primitiva: $g(x) = \int e^x\, dx = e^x$

Applicando il metodo di integrazione per parti:

- $\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = \boxed{e^x(x-1)}$

d. Risultato finale:

$$\int x^2 \cdot e^x = x^2 \cdot e^x - e^x(x-1) + c$$

4. *Metodo di integrazione per parti ricorsivo*

In determinati casi l'integrale ottenuto applicando il ***metodo di integrazione per parti doppio*** risulta essere uguale all'integrale di partenza. In questi casi conviene ***sostituire l'integrale*** con una ***variabile ausiliaria*** ed isolare opportunamente tale variabile.

Es_1: $\int \sin(x) \cdot e^x dx$

a. Scelta (vanno bene entrambi i casi):

$f(x) = \sin(x)$ In modo tale che cali di grado: $f'(x) = \cos(x)$

$g'(x) = e^x$ Calcolando la primitiva: $g(x) = \int e^x dx = e^x$

b. Applicando il metodo di integrazione per parti:

$$\int \sin(x) \cdot e^x dx = \sin(x) \cdot e^x - \boxed{\int \cos(x) \cdot e^x dx}$$

INTEGRALE PER PARTI DOPPIO

Scelta:

- $f(x) = \cos(x)$ In modo tale che cali di grado: $f'(x) = -\sin(x)$
- $g'(x) = e^x$ Calcolando la primitiva: $g(x) = \int e^x dx = e^x$

Applicando il metodo di integrazione per parti:

- $$\int \cos(x) \cdot e^x dx = \cos(x) \cdot e^x - \int -\sin(x) \cdot e^x dx =$$
  $$= \cos(x) \cdot e^x + \boxed{\int \sin(x) \cdot e^x dx}$$

Perciò risulta:

$$\int \sin(x) \cdot e^x dx = \sin(x) \cdot e^x - \left\{ \cos(x) \cdot e^x + \int \sin(x) \cdot e^x dx \right\}$$

c. Come si può notare l'integrale non è stato risolto ma, applicando il metodo di integrazione per parti doppio, si è ottenuto un altro integrale uguale a quello di partenza. Conviene perciò porre una variabile uguale a tale integrale.

$t = \int \sin(x) \cdot e^x dx$

Perciò si ottiene:

$$t = \sin(x) \cdot e^x - [\cos(x) \cdot e^x + t]$$

d. ***Isolare la variabile ausiliaria***:

$t = \sin(x) \cdot e^x - [\cos(x) \cdot e^x] - t$ $\qquad 2t = \sin(x) \cdot e^x - \cos(x) \cdot e^x$

$$t = \frac{\sin(x) \cdot e^x - \cos(x) \cdot e^x}{2}$$

e. Sostituire l'integrale alla variabile ausiliaria, ed ecco il risultato:

$$\int \sin(x) \cdot e^x dx = \frac{\sin(x) \cdot e^x - \cos(x) \cdot e^x}{2} + c$$

Autore: *Samuele Sandrini*