

Metodi di integrazione per funzioni fratte

1. Integrazione di funzioni fratte con numeratore e denominatore dello stesso grado e con costante mancante al numeratore

$$\frac{N}{D+c}$$

Es_1: $\int \frac{x}{x+2} dx$

a. Aggiungere e togliere al numeratore la costante del denominatore:

$$\int \frac{x+2-2}{x+2} dx$$

b. Dividere in due la fratta (si può fare perché hanno in comune il denominatore):

$$\int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2} \right) dx$$

c. Semplificare la prima fratta:

$$\int \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx$$

d. Dividere l'integrale in due integrali:

$$\int 1 dx - \int \frac{2}{x+2} dx$$

e. Risolvere i due integrali:

$$\int 1 dx - \int \frac{2}{x+2} dx = x - 2 \int \frac{1}{x+2} dx = x - \ln|x+2| + c$$

2. Integrazione di funzioni fratte con delta (Δ) della funzione del denominatore maggiore di Zero

Es_1: $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$

a. Calcolare il **delta** del denominatore:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 \quad \Delta > 0$$

b. Se il Δ risulta essere **maggiore di zero**, vuol dire che la funzione del denominatore ammette due soluzioni reali e quindi può essere rappresentata come **prodotto di due funzioni**.

Vi sono due metodi per scomporlo:

- Metodo di somma e prodotto:** Trovare due numeri che sommati diano b e moltiplicati diano c.

$$\text{Somma}=5; \text{Prodotto}=6 \quad N_1 = 3 \quad N_2 = 2$$

$$x^2 + bx + c = (x + N_1) \cdot (x + N_2) \quad \text{Quindi: } x^2 + 5x + 6 = (x + 3) \cdot (x + 2)$$

- Calcolare:** $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

- c. Riscrivere l'integrale con il denominatore scomposto:

$$\int \frac{dx}{(x+3) \cdot (x+2)}$$

- d. **Scomporre** la funzione fratta in **due funzioni fratte sommate** tra loro (scomporre come somma di frazioni elementari la frazione:) mediante il seguente metodo:

- $\frac{1}{(x+3) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$ Bisogna quindi trovare due numeri che soddisfino tale equazione.

$$\frac{A(x+2) + B(x+3)}{(x+3) \cdot (x+2)} = \frac{Ax + 2A + Bx + 3B}{(x+3) \cdot (x+2)} = \frac{x(A+B) + 2A + 3B}{(x+3) \cdot (x+2)}$$

Quindi:
$$\frac{1}{(x+3) \cdot (x+2)} = \frac{x(A+B) + 2A + 3B}{(x+3) \cdot (x+2)}$$

- Come si può notare, nel denominatore della funzione di partenza non vi è la x (x=0) e quindi:
 $A + B = 0$

Inoltre, la costante è pari ad 1 perciò:

$$2A + 3B = 1$$

- Mettendo tali equazioni in un sistema e risolvendolo, si ottiene:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ 2(-B) + 3B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ -2B + 3B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Per cui:

$$\frac{1}{(x+3) \cdot (x+2)} = -\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2}$$

- e. Riscrivere l'integrale come somma di frazioni (calcolato precedentemente):

$$\int \left[-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2} \right] dx$$

- f. Dividere l'integrale in due integrali e risolverli separatamente:

$$\int -\frac{1}{x+3} + \int \frac{1}{x+2} dx = -\int \frac{1}{x+3} + \int \frac{1}{x+2} dx = -\ln|x+3| + \ln|x+2| + c$$

3. Integrazione di funzioni fratte con delta (Δ) della funzione del denominatore pari a Zero

Es_1:
$$\int \frac{dx}{9x^2 - 6x + 1}$$

- a. Calcolare il **delta** del denominatore:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0 \quad \Delta = 0$$

- b. Se il Δ risulta essere pari a zero, vuol dire che la funzione del denominatore è il risultato del **cubo di un binomio**:

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$$

- c. Riscrivere l'integrale con il cubo:

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^2}$$

- d. Risolvere l'integrale con il **metodo di sostituzione**:

➤ Chiamare $3x-1 = y$;

➤ Calcolare il **differenziale** in y : $3dx = dy \quad dx = \frac{dy}{3}$

➤ Risolvere l'integrale in y :

$$\int \frac{dy}{3(y)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{(y)^2} = \frac{1}{3} \int y^{-2} dy = \frac{1}{3} \frac{y^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3y}$$

➤ **Sostituire** ad y il corrispondente valore in x :

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^2} = -\frac{1}{3 \cdot (3x-1)} = -\frac{1}{9x-3}$$

4. Integrazione di funzioni fratte con delta (Δ) della funzione del denominatore maggiore di Zero

Es_1: $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

- a. Calcolare il **delta** del denominatore:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16 \quad \Delta < 0$$

- b. Trovare il "**quadrato nascosto**" del denominatore:

$x^2 + 2x + c$ Qual è quel numero che al posto di c , forma un quadrato di binomio?

$x^2 + 2x + 1$ Il quale può essere rappresentato: $(x+1)^2$.

- c. Riscrivere l'integrale con la costante per formare il quadrato più una costante che serve per mantenerlo uguale all'integrale di partenza:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4}$$

- d. **Raccogliere la costante** che si somma al denominatore:

$$\int \frac{dx}{4 \left[\frac{(x+1)^2}{4} + 1 \right]} = \int \frac{dx}{4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right]}$$

- e. Utilizzare il **metodo di sostituzione** per risolvere l'integrale (ci si rifà alla forma della primitiva dell'arcotangente:

➤ Chiamare: $y = (x+1)/2$

➤ Calcolare il **differenziale** in y $dy = \frac{dx}{2} \quad dx = 2dy$

➤ Risolvere l'integrale in y :

$$\begin{aligned} \int \frac{2dy}{4[(y)^2 + 1]} &= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} \arctg(y) + c \end{aligned}$$

Si ricorda che

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg(x) + c$$

- Sostituire ad y il corrispondente valore in x, ecco il risultato:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{2} \right) + c$$