Regole di integrazione

1. $\int 1 \; dx = x + c$

2. $\int n \cdot x \; dx = n \int x \; dx$

"E' possibile estrarre le costanti moltiplicative da un integrale".

3. $\int f(x) + g(x) \; dx = \int f(x) \; dx + \int g(x) \; dx$

"L'integrale di una somma di funzioni è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni".

4. $\int x^n \; dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

Esempi:

a. $$\int \frac{1}{x^3} \; dx = \int x^{-3} \; dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2} + c$$

b. $$\int x\sqrt{x} \; dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} \; dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} \; dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} \; dx = \int x^{\frac{3}{2}} \; dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5}$$

c. $$\int \left(x \cdot \sqrt[3]{2x^4} \right) dx = \int \left(x \cdot \sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{4}{3}} \right) dx = \sqrt[3]{2} \int \left(x \cdot x^{\frac{4}{3}} \right) dx = \sqrt[3]{2} \int x^{1+\frac{4}{3}} dx = \sqrt[3]{2} \int x^{\frac{7}{3}} dx =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \frac{x^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1} = \sqrt[3]{2} \int x^{\frac{7}{3}} dx = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{x^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^{10}}}{10} = \frac{3\sqrt[3]{2x^{10}}}{10}$$

5. $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{1}{x} dx = \ln(x) + c$

Esempio:

a. $$\int \frac{1}{3x} \; dx = \frac{1}{3} \int x^{-1} \; dx = \frac{1}{3} \ln(x) + c$$

b. $$\int \frac{1}{x+2} \; dx = \ln|x+2| + c$$

Come si può notare tale metodo può essere applicato quando al denominatore si somma un coefficiente. Non si può applicare tale metodo quando davanti alla ***x*** compare un coefficiente poiché bisogna applicare il metodo di sostituzione che verrà illustrato successivamente.

Es: $\int \dfrac{1}{2x+2} \; dx$

6. $\int e^{\alpha \cdot x} dx = \dfrac{e^{\alpha \cdot x}}{\alpha} + c$

***Autore**: Samuele Sandrini*

Esempio:

a. $\int e^{3x}\ dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

b. $\int e^{\frac{3x}{2}}\ dx = \frac{e^{\frac{3x}{2}}}{3/2} = \frac{2 \cdot \sqrt[2]{e^{3x}}}{3} + c$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$

Esempio:

a. $\int 3^x\ dx = \frac{3^x}{\ln(3)} + c$

8. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$ $\int \sin(\alpha \cdot x)dx = \frac{-\cos(\alpha x)}{\alpha} + c$

Esempio:

a. $\int \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\ dx = -\frac{2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)}{3} + c$

9. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$ $\int \cos(\alpha \cdot x)dx = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} + c$

Esempio:

a. $\int \cos(2x)\ dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c$

10. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = arctg(x) + c$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$

***Autore**: Samuele Sandrini*

Integrali indefiniti riconducibili a quelli immediati

1. $\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$

Esempio:

a. $\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx = \frac{\ln^2(x)}{2}$

2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

Esempi:

a. $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+1} \, dx = \ln|x^2+4x+1| + c$ Perché: $D(x^2+4x+1) = 2x+1$

b. $\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \ln(x^2+1) + c$ Perché: $D(x^2+1) = 2x$

c. $\int \frac{5x}{x^2+5} \, dx$ Si può notare che: $D(x^2+5) = 2x$ mentre noi al numeratore abbiamo ***5x.***

In questo caso conviene portare fuori dall'integrale il 5:

$$5\int \frac{x}{x^2+5} \, dx =$$

Al numeratore manca il coefficiente ***2*** , perciò ***moltiplichiamo e dividiamo*** per il coefficiente:

$$= \frac{5}{2}\int \frac{x}{x^2+5} \cdot 2 \, dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+5} \, dx = \frac{5}{2}\ln\left(x^2+5\right)$$

d. $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)+2} dx$ Ma: $D(\cos(x)+2) = -\sin(x)$ per cui moltiplichiamo e dividiamo per -1.

$$= -1\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)+2} \cdot -1 \, dx \quad = \quad -\ln|\cos(x)+2| + c$$

3. $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$

Esempi:

a. $\int e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \, dx = e^{\sin(x)} + c$ Perché la derivata del seno è appunto il coseno

b. $\int 2x \cdot e^{x^2} \, dx = e^{x^2} + c$

4. $\int f'(x) \sin[f(x)] dx = -\cos[f(x)] + c$

5. $\int f'(x) \cos[f(x)] dx = \sin[f(x)] + c$

***Autore**: Samuele Sandrini*