Serie numeriche

Si definisce ***serie numerica*** una successione di numeri reali.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_\infty$$

Parallelo con l'informatica:

$\sum_{n=0}^{\infty} n+1$ Tale serie numerica in linguaggio di programmazione corrisponde a:

```
risultato = 0;
for(n = 0; n < ∞; n++)
{
    risultato = risultato + 1;
}
```

Una serie numerica può:

- Convergere (in un determinato valore).
- Divergere (converge ad infinito);
- Non convergere, poiché possiede valori oscillanti.

Serie note:

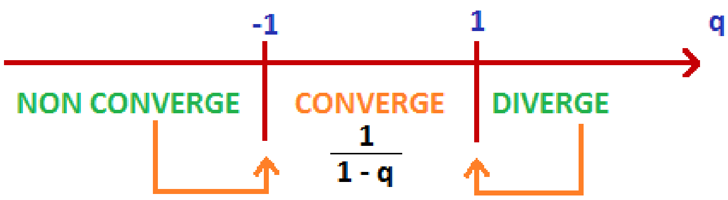
1. *Serie Geometrica*

Successione di numeri, tali che il rapporto tra un elemento ed il suo precedente è una costante (***q***) detta ***ragione***.

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \infty$$

Per determinare la somma dei primi ***n*** termini della serie è possibile utilizzare tale formula:

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$



Tramite questo grafico si comprende che:

- se $-1 < |q| < 1$ (esclusi) la **serie converge**. Il valore in cui converge (partendo dal primo termine, con $n = 0$) si calcola come $\frac{1}{1-q}$;
- se $|q| \leq -1$ (incluso) la ***serie non converge*** (Valori oscillanti)***;***
- se $|q| \geq 1$ (incluso) la serie ***diverge***.

***Autore**: Samuele Sandrini*

Per determinare il valore a cui converge la serie partendo da un ***N*** termine:

$$\sum_{i=N}^{n} q^i = \frac{q^N}{1-q} \qquad \textbf{\textit{Con:}} \qquad -1 < |q| < 1$$

2. Serie Armonica

La serie armonica è la sommatoria infinita delle frazioni unitarie (i reciproci) dei numeri naturali.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\infty} = \infty$$

Apparentemente, tale serie sembra che converga ma scomponendola in blocchi di 2^n elementi si nota che:

BLOCCHI	SOMMA DEI TERMINI
$2^0\, elementi:\ 1$	$S = 1$
$2^1\, elementi:\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	$S = \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$
$2^3\, elementi:\ \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}$	***S*** sicuramente minore di: $\frac{1}{15} \cdot 8 = 0{,}5\overline{3}$
$2^4\, elementi:\ \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \ldots \frac{1}{28} + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31}$	***S*** sicuramente minore di: $\frac{1}{31} \cdot 16 \approx 0{,}516$
$2^5\, elementi:\ \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \ldots + \frac{1}{62} + \frac{1}{63}$	***S*** sicuramente minore di: $\frac{1}{63} \cdot 32 \approx 0{,}507$

la serie armonica è costituita da blocchi il cui valore è maggiore di 0,5; sommando questi infiniti blocchi (di 0,5 e superiore) si ottiene ∞. Si conclude che la ***serie armonica*** è una ***serie divergente***.

3. Serie Armonica di ordine α *(Serie armonica generalizzata)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Se:

- $\alpha > 1$ La ***serie è convergente;***
- $\alpha < 1$ La ***serie è divergente.***

4. Serie Esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

5. Serie a Segni alterni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(2)$$

Autore: *Samuele Sandrini*